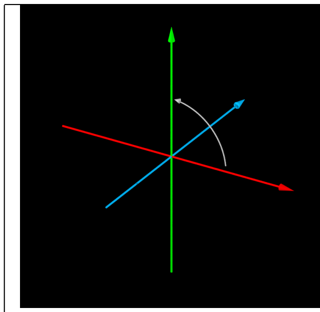
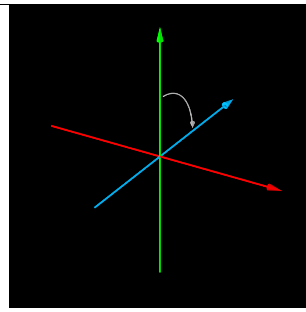
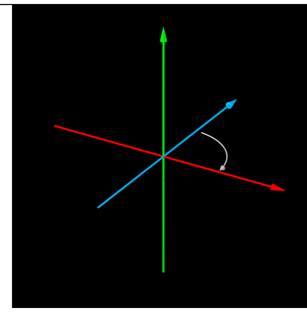
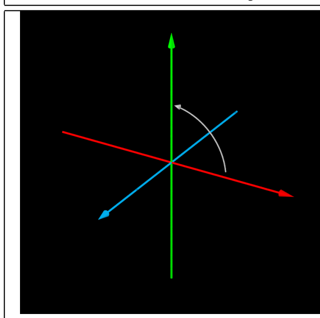
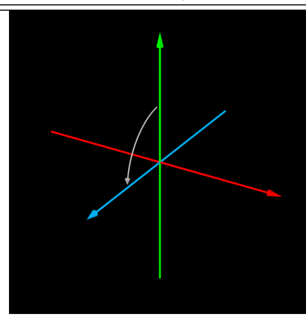
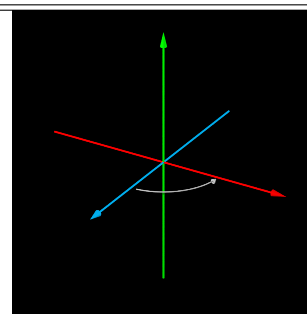
1 Revisación de definiciones y operaciones con vectores

1.1 Sistemas de ejes (y rotación positiva)

1.1.1 Mano izquierda (Renderman, POVray)

Rotación $x \to y$	Rotación $y \to z$	Rotación $z \to x$
		

1.1.2 Mano derecha (OpenGL, Vulkan)

Rotación $x \to y$	Rotación $y \to z$	Rotación $z \to x$
		

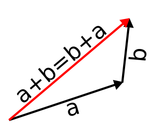
1.2 Características de vectores:

Por lo general, escrita como $\overrightarrow{a}$ o en negrita $(\mathbf{a})$. Magnitud escrito como $\|\mathbf{a}\|$. El vector también puede representarse por sus proyecciones en los ejes del sistema de coordenadas.

- Generalmente solo indica dirección -> posición absoluta no es importante
- Utilizado para almacenar compensaciones, desplazamientos, lugares
- Pero estrictamente hablando, si se utiliza un vector para indicar una posición, entonces no son vectores y no se pueden sumar: una ubicación implica implícitamente un origen, mientras que un desplazamiento no.

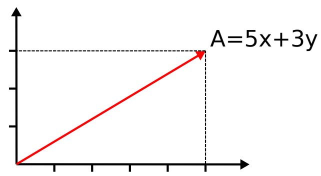
Sumar vectores

- Geométricamente: Regla del paralelograma



- En coordenadas cartesianas (abajo), simplemente sumar coordenadas

Coordenadas cartesianas



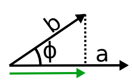
$A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
$A^T = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$
$\|A\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

- X e Y pueden ser cualquier unidad (generalmente ortogonal) vectores

Multiplicación de vectores

- Producto escalar (dot product)
- Productor vectorial (cross product)
- Bases ortonormales
- Uso de sistema de ejes 'derecha' o 'izquierda'

Producto escalar (dot product)

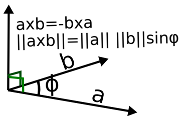


$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos\theta$
$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$ si $\mathbf{a} = 0$ ó $\mathrm{b} = 0$ ó $\mathbf{a}$ es perpendicular a $\mathbf{b}$
$\mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \, |\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2$ ó $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}}$
$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$
$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \bullet \mathbf{c} + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$
$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \bullet (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \bullet \mathbf{c} + \mathbf{a} \bullet \mathbf{d} + \mathbf{b} \bullet \mathbf{c} + \mathbf{b} \bullet \mathbf{d}$
$(k\mathbf{a}) \bullet \mathbf{b} = \mathbf{a} \bullet (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})$
$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y$
Finalidad:

- Encontrar ángulo entre vectores
- Calcular la proyección de un vector sobre otro (ej.: Calcular posición de un punto en otro sistema de coordenadas
- Ventaja: Fácil de calcular en coordenadas cartesianas
- Crear un vector ($\mathbf{v}_2$) perpendicular a otro ($\mathbf{v}_1$):
  - Es perpendicular cuando $\mathbf{v_1} \bullet \mathbf{v}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{1a} * v_{2a} + v_{1b} * v_{2b} + v_{1c} * v_{2c} = 0$
  - Seleccionamos (por ejemplo)v_{2a} y v_{2b}, y luego calculamos v_{2c} para que el resultado sea 0:
  - $v_{2c} = -\frac{v_{1a} * v_{2a} + v_{1b} * v_{2b}}{v_{1c}}$

Proyección de un vector sobre otro:
$\|\mathbf{b} \to \mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| \cos\theta = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|}$
$\mathbf{b} \to \mathbf{a} = \|\mathbf{b} \to \mathbf{a}\| \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$

Producto vectorial (Cross product)



$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \sin\theta$

- Producto vectorial es perpendicular a los dos vectores originales
- Dirección determinado por la regla de mano derecha
- Útil en construcción de sistemas de ejes

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \mathbf{z} \\
\mathbf{y} \times \mathbf{x} &= -\mathbf{z} \\
\mathbf{y} \times \mathbf{z} &= \mathbf{x} \\
\mathbf{x} \times \mathbf{y} &= -\mathbf{x} \\
\mathbf{z} \times \mathbf{x} &= \mathbf{y} \\
\mathbf{x} \times \mathbf{z} &= -\mathbf{y}
\end{aligned}$$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$
$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
$\mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

En sistemas cartesianos:

$$\mathrm{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} y_a z_b - y_b z_a \\ z_a x_b - z_b x_a \\ x_a y_b - x_b y_a \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -z_a & y_a \\ z_a & 0 & -x_a \\ -y_a & x_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix}$$

Bases ortonormales/Marcos de coordenadas

- Importante para la representación de puntos, posiciones, ubicaciones
- A menudo, muchos conjuntos de sistemas de coordenadas (no sólo X, Y, Z): global, local, mundo, el modelo, las partes del modelo (cabeza, manos, ...)

Marcos de coordenadas

Cualquier conjunto de vectores en 3D, con la condición que:

$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = 1$

$$\left[\begin{aligned} \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} &= 0 \\ \mathbf{v} \bullet \mathbf{w} &= 0 \\ \mathbf{w} \bullet \mathbf{u} &= 0 \end{aligned}\right.$$

$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{w}$
$\mathbf{p} = (\mathbf{p} \bullet \mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{p} \bullet \mathbf{v})\mathbf{v} + (\mathbf{p} \bullet \mathbf{w})\mathbf{w}$
Porque?
Frecuentemente, tenemos una dirección $\mathbf{a}$ ('look_at')
Necesitamos una seguna direccion $(\mathbf{b})$ (dirección 'up')
Construimos una base ortonormal para trasformar objetos

Construcción

Queremos asociar $\mathbf{a}$ con $\mathbf{w}$, and $\mathbf{v}$ con $\mathbf{b}$

- Pero ni $\mathbf{a}$ ni $\mathbf{b}$ son ni norma ortogonales ni unitarios
- Y también tenemos que encontrar $\mathbf{u}$

$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$

$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{w}}{\|\mathbf{b}\times\mathbf{w}\|}$

$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$

2 Matrices y operaciones basicas con matrices

Arreglo de números, ej. mxn = m filas, n columnas = $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Según el idioma de programación puede haber confusión sobre la forma que los valores se almacenan en la memoria (ie. Columnas primera, luego filas, o inversamente). Puede ser importante según la aplicación!

Multiplicación de matrices

- Número de columnas en primer matriz = número de filas en segunda. Ej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 10 \\ 2.2 & 3 & -2.5 & 5 \end{bmatrix}$$

Elemento $[i, j]$ in producto es producto escalar de fila i matriz 1 con column j de matriz 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 10 \\ 2.2 & 3 & -2.5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.4 & 26 & -9.5 & 45 \\ 10.6 & 19 & 8.5 & 35 \\ 18.8 & 37 & 30 & 70 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 10 \\ 2.2 & 3 & -2.5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.4 & 26 & -9.5 & 45 \\ 10.6 & 19 & 8.5 & 35 \\ 18.8 & 37 & 30 & 70 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 10 \\ 2.2 & 3 & -2.5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.4 & 26 & -9.5 & 45 \\ 10.6 & 19 & 8.5 & 35 \\ 18.8 & 37 & 30 & 70 \end{bmatrix}$$

- No conmutativos! (AB y BA son generalmente diferentes)
- Asociativo y distributivo:
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- Clave para transformación de puntos
- Un vector puede representarse como matriz de columna (mx1)
- Ej. espejar respecto el eje y (en 2D):
- $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$
- Transposición de una matriz:

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$
- $(AB)^T = A^T B^T$
- Matriz de identitad (unitario): $I_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Multiplicación de vectores en forma de matriz:
- $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{a^T b}$
- $\begin{bmatrix} x_a & y_a & z_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a x_b & y_a y_b & z_a z_b \end{bmatrix}$
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{A}^* \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -z_a & y_a \\ z_a & 0 & -x_a \\ -y_a & x_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix}$

3 Transformaciones 2D:

3.1 Escala (no-uniforme, i.e. $Escala_x \neq Escala_y$)

$$Scale = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

$$Scale^{-1} = \begin{bmatrix} s_x^{-1} & 0 \\ 0 & s_y^{-1} \end{bmatrix}$$

3.2 Shear (cizallamiento)

$$Shear = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Shear^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3 Rotación

En 2D:

- Lineal
- Commutativo

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

4 Transformaciones 3D:

Aunque en gran parte una extensión de las transformaciones en 2D, existen importantes diferencias que merecen atención. Además, ciertos problemas en 3D llevaron a la introducción de un cuarto parámetros en las coordenadas (homogéneas). Otros problemas y la disponibilidad de mayor capacidad de cálculos llevaron a técnicas aún mas avanzadas (Cuaterniones).

4.1 Escala (no-uniforme, i.e. $Escala_x \neq Escala_y \neq Escala_z$)

$$Scale = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x x \\ s_y y \\ s_z z \end{bmatrix}$$

4.2 Rotation (rotación)

- 3D complicado

4.2.1 Rotación alrededor de ejes:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Siempre ortogonal
Filas/columnas ortonormales

$$R_{uvw} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{bmatrix} u = x_u + y_u Y + z_u Z$$

$$R_{uvw} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \bullet x_p \\ v \bullet y_p \\ w \bullet z_p \end{bmatrix}$$

- Filas de la matriz son 3 vectores unitarios del nuevo sistema de coordenadas
- Se puede construir una matriz de rotación de 3 vectores ortonormales
- Efectivamente, proyecta el punto en el nuevo sistema
- Conversión del nuevo sistema (uvw) a componentes cartesianos xyz
- Invertir or transponer devuelve xyz a uvw
- ¡NO CONMUTATIVO! (vs 2D)
- Rotación alrededor de x, luego y, no es lo mismo que y luego x
- El orden de aplicación es significante
- También significa que multiplicación de matrices no es conmutativo
  - $R1 * R2$ no es lo mismo que $R2 * R1$

4.2.2 Rotación alrededor de un eje arbitrario

Tarea: Rotación de $\mathbf{b}$ por un ángulo θ alrededor de un eje $\mathbf{a}$
Pasos:

- $\mathbf{b}$ tiene componentes paralelos y perpendiculares a $\mathbf{a}$: Componentes paralelos no se modifican por la rotación
- Definir $\mathbf{c}$ ortogonal a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (similar a construir un nuevo eje). Se utiliza el producto vectorial (cross).
- Respecto la componente perpendicular de $\mathbf{b}$:
- $\cos\theta$ no cambia
- $\sin\theta$ proyecta sobre el vector $\mathbf{ca}$

Eje-ángulo

$(b\backslash a)_{ROT} = (I_{3x3}\cos\theta - aa^T\cos\theta)b + (A^*\sin\theta)b$
$(b \to a)_{ROT} = (aa^T)b$

$$\begin{array}{rcl} R(a,\theta) & = & I_{3x3}\cos\theta \\ & + & aa^T(1-\cos\theta) \\ & + & A^*\sin\theta \end{array}$$

$R(a,\theta)$	$= \quad I_{3x3}\cos\theta$	Sin cambio (cos)
	$+ \quad aa^T(1-\cos\theta)$	Sin cambio (paralelo a $\overrightarrow{a}$)
	$+ \quad A^*\sin\theta$	Componente rotado (perpendicular)

$$R(a,\theta) = \cos\theta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1-\cos\theta)\begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

4.3 Composición de transformaciones

- Frecuentemente queremos combinar transformaciones (ej escalar por 2, rotar 45°)
- Ventaja de representación por matrices: Combinación todavía una matriz
- No conmutativo: El orden es importante!

Ej. Componer rotaciones y escalas:

$x_3 = Rx_2$, $x_2 = Sx_1$
$x_3 = R(Sx_1) = (RS)x_1$
$x_3 \neq SRx_1$

Revertir transformaciones

Supongamos que queremos revertir una combinación de 3 transformaciones
Opción 1: Encontrar la matriz compuesta
Opción 2: Invertir cada transformada, y invertir el orden de aplicación
$M = M_1M_2M_3$
$M^{-1} = M_3^{-1}M_2^{-1}M_1^{-1}$
$M^{-1}M = M_3^{-1}(M_2^{-1}(M_1^{-1}M_1)M_2)M_3$

2D:

Rotación:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Ortogonal? $R^TR = I$

Coordenadas homogeneas

Mover x por +5 unidades, dejar y, z sin cambiar. Cual es la matrix apropriada?

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & ? & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+5 \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Agregar una cuarta coordenada ($w = 1$)

Resulta en una matriz de 4x4 - muy común en gráficos, hardware

Por el momento, cuarta fila es siempre $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+5 \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dividir por 4to punto (w) para obtener punto (inhomogénio):

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicación por $w > 1$ no tiene efecto

Asumir que $w >= 0$. Para $w > 0$ tenemos un punto normal (finito). Para $w = 0$ el punto está a distancia infinita (utilizado en vectores para terminar translación)

Ventajas de coordenadas homogéneas:

Sistema unificado para representar translación, rotación, representación, etc.

Se pueden concatenar cualquier conjunto de transformaciones, obtiene matriz de 4x4

Fórmulas mas sencillas, sin casos especiales

Estandar en software gráfico, hardware

Translación:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3x3} & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = TP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+T_x \\ y+T_y \\ z+T_z \\ 1 \end{bmatrix} = P + T$$

¡El orden es importante! TR no es lo mismo que RT

Mostramos primero rotación, seguido por translación (orden mas utilizado)

$P' = (TR)P = MP = RP + T$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & T_x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & T_y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P' = (RT)P = MP = R(P + T) = RP + RT$

Translación seguido por rotación:

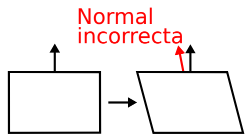
$P' = (RT)P = MP = R(P + T) = RP + RT$

$$M = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{3x3} & R_{3x3}T_{3x1} \\ 0_{3x3} & 1 \end{bmatrix}$$

Transformación de normales:

Importante para tareas en gráficación, como iluminación

No transformar como puntos! (ej. shear)



Utiliza trucos de algebra para obtener transformada correcta:

$t \rightarrow Mt$
$n \rightarrow Qn \ (Q?)$
$n^T t = 0$
$n^T Q^T M t = 0 \Rightarrow Q^T M = I$
$Q = (M^{-1})^T$

Todas las discusiones se basan en operaciones con puntos.

También es posible de cambiar de sistema de coordenadas.

Ej.: movimientos significa que ó el punto de mueve hacia atrás, o que sistema de coordenadas se mueve hacia adelante:

El sistema de coordenadas puede diferir en origen y en orientación (ej. 2 observadores)

Ej.: El sistema de coordenadas del mundo, y sistema de coordenadas de una cámera:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$R_{uvw} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{bmatrix}$$

$u = x_u X + y_u Y + z_u Z$

gluLookAt

Matriz que define como miramos a las cosas:

$gluLookAt(eye_x, eye_y, eye_z, center_x, center_y, center_z, up_x, up_y, up_z)$

Crear un sistema de coordenadas para la cámara

$\overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}$

$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{w}}{\left\|\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{w}\right\|}$

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u}$

Definir la matriz de rotacióngluLookAt(eye

Aplicar translación para la ubicación

(tenemos que aplicar la translación antes de rotar!)

gluLookAt final:

$$\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u & 0 \\ x_v & y_v & z_v & 0 \\ x_w & y_w & z_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & e_x \\ 0 & 1 & 0 & e_y \\ 0 & 0 & 1 & e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u & -x_u e_x - y_u e_y - z_u e_z \\ x_v & y_v & z_v & -x_v e_x - y_v e_y - z_v e_z \\ x_w & y_w & z_w & -x_w e_x - y_w e_y - z_w e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proyección

Matrices homogéneas
- Última file siempre [0 0 0 1]
- Para la proyección (visualización) modificaremos la última fila
- Proyección es convertir de 3D a 2D
- Preservar líneas rectas
- Proyección ortográfica, perspectiva (cilindrica, etc)
- Caso trivial: Setear una de las coordenadas en 0

Proyección ortográfica

Características:
- Líneas paralelas siguen paralelas
- Útil para dibujos técnicos
- En general:
- Cubo, descrito por parámetros (izq, der, sup, inf, cerca, distante)
- Queremos transformarlo en cubo unitario: tamaño 2x2x2 unidades, ubicado en el origen
- Primer paso, trasladar, y luego escalear en cubo unitario

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{der-izq} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{sup-inf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{dist-cerca} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{der+izq}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{sup+inf}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{dist+cerca}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mirando hacia - en el eje z hace que f y n sean negativos (y $n > f$)

Resultado final:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{2}{der-izq} & 0 & 0 & -\frac{der+izq}{2} \\ 0 & \frac{2}{sup-inf} & 0 & -\frac{sup+inf}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{dist-cerca} & -\frac{dist+cerca}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$glOrtho = \begin{bmatrix} \frac{2}{der-izq} & 0 & 0 & -\frac{der+izq}{2} \\ 0 & \frac{2}{sup-inf} & 0 & -\frac{sup+inf}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{dist-cerca} & -\frac{dist+cerca}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proyección perspectiva

Proyección mas utilizada para computación gráfica, arte, sistemas visuales
- Objectos mas distantes se perciben mas pequeños
- Líneas paralelas no son paralelas - convergen en un punto
- Vista de nuestra pantalla desde arriba:

$\frac{x}{z} = \frac{x'}{d} \Rightarrow x' = \frac{d*x}{z}$ y $\frac{y}{z} = \frac{y'}{d} \Rightarrow y' = \frac{d*y}{z}$

En matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & 0 \end{bmatrix}$$

Verificar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} =?$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ -\frac{z}{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d*x}{z} \\ -\frac{d*y}{z} \\ -d \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cuaterniones

Matemática de operaciones en 3D, utilizando funciones trigonométricas incurre en ciertos

casos en inseguridad de 180 grados. Estos problemas reflejan los problemas que se experimentaron en las plataformas inerciales para nagevación (aviación y uso espacial).

El matemático Irlandes Hamilton, inventó los cuaterniones que facilitan estas operaciones sin incurrir en estas inseguridades (aunque Euler, 70 años antes, ya describió un concepto similar). Como resultado, a mas de 150 años de su invención, han visto in incremento major en aplicación, por ejemplo en robótica, comutadoras de aborde de cohetes y aviones, fractales etc. Cuaterniones representan una extensión al sistema de los números complejos (introduce dos números mas). Un cuaternión se expresa:

$q = a + bi + cj + dk$

donde i, j y k son los números complejos, con las siguiente propiedades:

$i^2 = -1$, $j^2 = -1$, $k^2 = -1$y además: $ijk = -1$

Conjugada:

$\bar{a} = a - bi - cj - dk$

Conversión de ángulos Euler a cuaterniones:

$$\begin{aligned} a &= c_1c_2c_3 - s_1s_2s_3 \\ b &= s_1s_2c_3 + c_1c_2s_3 \\ c &= s_1c_2c_3 + c_1s_2s_3 \\ d &= c_1s_2c_3 - s_1c_2s_3 \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{array}{cc} c_1 = \cos(rumbo/2) & s_1 = \sin(rumbo/2) \\ c_2 = \cos(actitud/2) & s_2 = \sin(actitud/2) \\ c_3 = \cos(inclin/2) & s_3 = \sin(inclin/2) \end{array}$$

Conversión de cuaterniones a ángulos Euler

$$\begin{aligned} rumbo &= \arctan 2(2q_cq_a - 2q_bq_{d,} 1 - 2q_c^2 - q_d^2) \\ actitud &= \arcsin(2q_bq_c + 2q_dq_a \\ inclin &= \arctan 2(2q_bq_a - 2q_cq_d, 1 - 2q_b^2 - 2q_d^2) \end{aligned}$$

excepto cuando $q_bq_c + q_dq_a = 0.5$(polo norte):

$$\begin{array}{ccc} rumbo & = & 2\arctan 2(q_bq_a) \\ inclin & = & 0 \end{array}$$

o cuando $q_bq_c + q_dq_a = -0.5$(polo sur):

$$\begin{array}{ccc} rumbo & = & -2\arctan 2(q_bq_a) \\ inclin & = & 0 \end{array}$$

Suma de dos cuaterniones:

$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$

Producto de dos cuaterniones:

$$q_1q_2 = \begin{array}{c} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2+ \\ (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)i+ \\ (a_1b_3 + a_3b_1 - a_2b_4 + a_4b_2)j+ \\ (a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)k \end{array}$$

También pueden interpretarse como dos partes:

$q_1 = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k = (a_1, \overrightarrow{a})$

donde $\overrightarrow{a} = (a_2, a_3, a_4)$

La multiplicación así se expresa mas simplemente:

$q_1q_2 = (s_1, \vec{a}_1) \bullet (s_2, \vec{v_2}) = (s_1s_2 - \vec{v_1}\vec{v_2}, s_1\vec{v_2} + s_2\vec{v_1} + \vec{v_1} \times \vec{v_2})$

División es también posible: la inversa de un cuaternion:

$q^{-1} = \frac{a}{[n(a)]^2}$donde $n(a)$ es la norma $a(n) = \sqrt{\bar{a}a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}$

Rotación alrededor de un vector unitario $\bar{n}$:
$q = (s, \vec{v}) = (\cos(\frac{\theta}{2}), n\sin(\frac{\theta}{2}))$

gluPerspective

$gluPerspective(fovy, aspect, zNear > 0, zFar > 0)$
fovy: Control del aspecto en direcciones x y y
zNear, zFar: Control de frustrum

5 Raytracing

5.1 Rasterización por rayos (trazado de rayos)

Seudo-código:

```
trace(camera, scene, width, height):
    image = Image(width, height)
    for each line of the image:
        for each pixel of the line:
            trazar un rayo por el pixel correspondiente
            buscar intersecciones
            calcular el color del pixel
    retornar la imagen
```

Consideraciones:

- Evaluación pixel por pixel: parece ineficiente
- Es bueno para escenas muy complicadas (amortiza pre-procesamiento, no es complicado)
- Mas efectos posibles (sombras, efectos luminosos)

5.2 Interseccíónes

5.2.1 Intersección con una esfera

Ecuaciones:
Rayo:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R_0} + t\mathbf{R_1}$$

Esfera ($\mathbf{C}$ es el centro, $\mathbf{P}$ es un punto en la superficie):

$$(\mathbf{P} - \mathbf{C}) \bullet (\mathbf{P} - \mathbf{C}) = r^2$$

Sustituir ecuación de rayo en la ecuación de la esfera:

$$(\mathbf{R_0} + t\mathbf{R_1} - \mathbf{C}) \bullet (\mathbf{R_0} + t\mathbf{R_1} - \mathbf{C}) = r^2$$

$$t^2\mathbf{R_1} \bullet \mathbf{R_1} + 2t\mathbf{R_1} \bullet (\mathbf{R_0} - \mathbf{C}) + (\mathbf{R_0} - \mathbf{C}) \bullet (\mathbf{R_0} - \mathbf{C}) = r^2$$

Ya que t es la variable independiente, resolver ecuación cuadrática para t.
Es una ecuación del tipo $at^2 + bt + c = 0$
Donde:

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{R_1} \bullet \mathbf{R_1} = 1 \\ b &= 2(\mathbf{R_1} \bullet (\mathbf{R_0} - \mathbf{C}) \\ c &= (\mathbf{R_0} - \mathbf{C}) \bullet (\mathbf{R_0} - \mathbf{C}) - r^2 = \|\mathbf{R_0} - \mathbf{C}\|^2 - r^2 \end{aligned}$$

Las posibles raíces de $at^2 + bt + c = 0$ son:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

o, con los valores reales:

$$t = \frac{-2(\mathbf{R_1} \bullet (\mathbf{R_0} - \mathbf{C})) \pm \sqrt{4(\mathbf{R_1} \bullet (\mathbf{R_0} - \mathbf{C}))^2 - 4 \left\| \mathbf{1} \right\|^2 (\left\| \mathbf{R_0} - \mathbf{C} \right\|^2 - r^2)}}{2 \left\| 1 \right\|^2}$$

Tomando en cuenta que $\left\| 1 \right\|^2 = 1$, simplificamos mas:

$$t = -2(\mathbf{R_1} \bullet (\mathbf{R_0} - \mathbf{C})) \pm \sqrt{(\mathbf{R_1} \bullet (\mathbf{R_0} - \mathbf{C}))^2 - \left\| \mathbf{R_0} - \mathbf{C} \right\|^2 + r^2}$$

Posibilidades:

- Dos raices positivos y reales: Seleccionar el menor (=mas cerca)
- Dos raices negativas y reales: La esfera está detras de la cámera
- Dos raices iguales: punto tangente
- Una raiz positiva, otra negativas: Estamos dentro de la esfera
- Dos raices complejas: No hay intersección (controlar denominador)

Sustituyendo el (los) valor(es) de t en la ecuación del rayo $\mathbf{P} = \mathbf{R_0} + t\mathbf{P_1}$, obtenemos las intersecciones.
En el 'punto de impacto', la normal sobre la superficie de la esfera: $\frac{\mathbf{P}-\mathbf{C}}{\|\mathbf{P}-\mathbf{C}\|}$

5.2.2 Intersección rayo - plano:

Ecuación del rayo:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R_0} + t\mathbf{R_1}$$

($\mathbf{R_0}$ es el origen del rayo, $\mathbf{R_1}$ es la dirección, t es la distancia)
Ecuación del plano:

$$(\mathbf{P} - \mathbf{P_p}) \bullet \mathbf{n} = 0$$

(P_p es un punto sobre el plano, $\mathbf{n}$ es la normal del plano)
Sustituyendo la ecuación del rayo en la del plano, encontramos la eventual intersección:

$$(t\mathbf{R_1} + \mathbf{R_0} - \mathbf{P_p}) \bullet \mathbf{n} = 0$$

$$t\mathbf{R_1} \bullet \vec{n} + (\mathbf{R_0} - \mathbf{P_p}) \bullet \mathbf{n} = 0$$

Buscando t:

$$t = \frac{(\mathbf{R_0} - \mathbf{P_p}) \bullet \mathbf{n}}{\mathbf{P_1} \bullet \mathbf{n}}$$

Si $\mathbf{R_1} \bullet \mathbf{n} = 0$, entonces el rayo está paralelo al plano. Aquí hay dos posibilidades: si $(\mathbf{R_0} - \mathbf{P_p}) \bullet \mathbf{n} = 0$, entonces el rayo está contenido completamente en el plano. Sino, el rayo está simplemente paralelo y no hay puntos de intersección (i.e., la cámera 'no vé' al plano. En el caso que $\mathbf{P_1} \bullet \mathbf{n} \neq 0$, entonces si existe un punto en común: se puede calcular la ubicación con $t\mathbf{R_1} + \mathbf{R_0}$.

5.2.3 Intersección rayo - box:

Ecuación del rayo: $P = t\vec{P_1} + \vec{P_0}$ (P_0 es el origen del rayo, $\vec{P_1}$ es la dirección, t es la distancia)

Es equivalente a: $P_t = t(D_x + D_y + D_z) + P_{0x} + P_{0y} + P_{0z}$ ó:

$$P_{xt} = tD_x + P_{0x}$$
$$P_{yt} = tD_y + P_{0y}$$
$$P_{zt} = tD_z + P_{0z}$$

Las ecuaciones de los 6 planos (que están paralelos a los ejes):

$$\begin{array}{ccc} x = x_1 & y = y_1 & z = z_1 \\ x = x_2 & y = y_2 & z = z_2 \end{array}$$

Reemplazando y despejando para obtener t (en cada plano):

$$\begin{array}{ccc} t_{1x} = (x1 - P_{0x})/D_x & t_{1y} = (y_1 - P_{0y})/D_y & t_{1z} = (z_1 - P_{0z})/D_z \\ t_{2x} = (x2 - P_{0x})/D_x & t_{1y} = (y_2 - P_{0y})/D_y & t_{2z} = (z_2 - P_{0z})/D_z \end{array}$$

D_x, D_y y D_z deben ser controlados cada uno: Un valor 0 indica que en esta dirección, el rayo es paralelo al plano.

Con las fórmulas anteriores, obtenemos los puntos de impacto. Pero además, para raytracing es importante de determinar la orientación de cada plano (la dirección de la normal), y de determinar la ubicación de la cámara respecto a la 'caja'. El siguente algoritmo determina estos datos (Nota: Hay otro algoritmos que no utilizan T_{near} y T_{far}. Eso dificulta la codificación del algoritmo en un 'for'). En seudo-código:

```
set Tnear = - infinity, Tfar = infinity
for each pair of planes P associated with X, Y, and Z do:

    (example using X planes)
    if direction Xd = 0:   (the ray is parallel to the X planes,
         --> if origin Xo is not between the slabs ( Xo < Xl or Xo > Xh):
                return 'no hits'
    else (the ray is not parallel to the plane
         --> compute the intersection distance of the planes:
             T1 = (Xl - Xo) / Xd
             T2 = (Xh - Xo) / Xd
             If T1 > T2 swap (T1, T2)        /* since T1 intersection with near plane */
             If T1 > Tnear set Tnear = T1    /* want largest Tnear */
             If T2 < Tfar set Tfar = T2      /* want smallest Tfar */
             If Tnear > Tfar                 /* box is missed */
                return 'no hits'
             If Tfar < 0                     /* box is behind camera */
                return 'no hits'

end of for loop
return hits                                 /* If Box survived all above tests */
/* original: https://www.siggraph.org//education/materials/HyperGraph/raytrace/rtinter3.htm
```

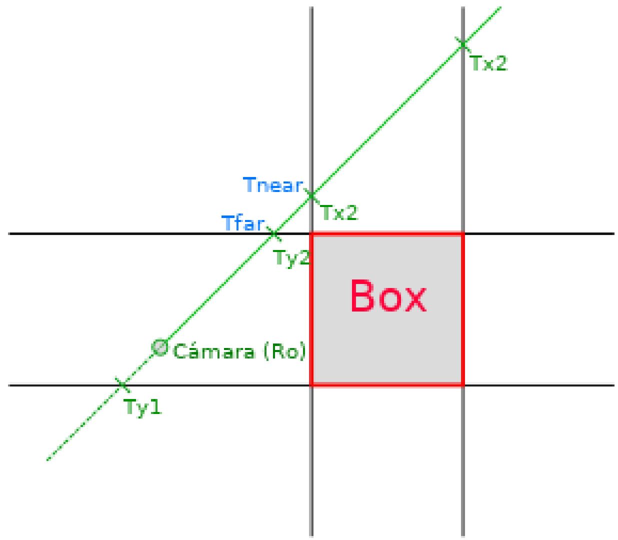


Figure 1: $T_{near} > T_{far} \rightarrow Falla$

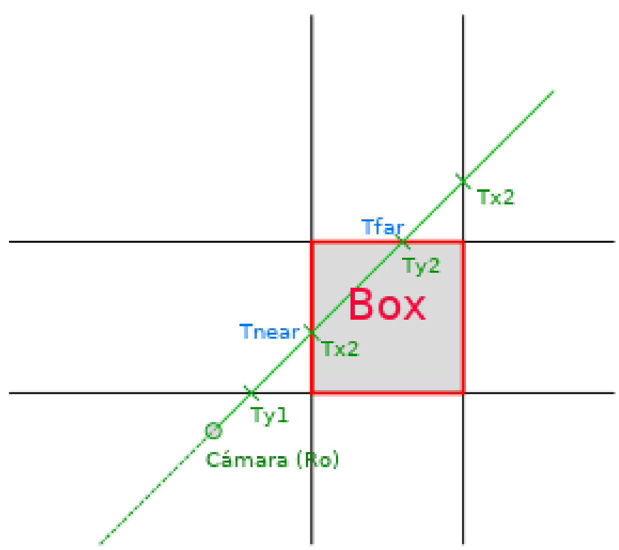


Figure 2: $T_{near} < T_{far} \rightarrow Intersección$

5.2.4 Intersección rayo - cilindro:

Ecuación del rayo: $P = tR_1 + R_0$ (R_0 es el origen del rayo, D es la dirección, t es la distancia)
Es equivalente a $P_t = t(R_x + R_y + R_z) + R_{0x} + R_{0y} + R_{0z}$ ó:

$$x_t = tR_{1x} + R_{0x}$$
$$y_t = tR_{1y} + R_{0y}$$
$$z_t = tR_{1z} + R_{0z}$$

Ecuación del cilindro (infinito) alrededor de y:

$$x^2 + z^2 - r^2 = 0$$

Si permitimos que el cilindro esté alrededor de un eje paralelo a y, ubicado en x_0 y z_0:

$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0$$

Reemplazando:

$$(tR_{1x} + R_{0x} - x_0)^2 + (tR_{1z} + R_{0z} - z_0)^2 - r^2 = 0$$

$$t^2R_{1x}^2 + R_{0x}^2 + x_0^2 + 2tR_{1x}R_{0x} - 2tR_{1x}x_0 - 2R_{0x}x_0 + t^2R_{1z}^2 + R_{0z}^2 + z_o^2 + 2tR_{1z}P_{0z} - 2tR_{1z}z_0 - 2R_{0z}z_0 - r^2 = 0$$

Agrupando términos con t^2 y t:

$$t^2(R_{1x}^2 + R_{1z}^2) + 2t(R_{1x}R_{0x} - R_{0x}x_0 + R_{0z}P_{0z} - R_{0z}z_0) + R_{0x}^2 + x_0^2 - 2R_{0x}x_0 + R_{0z}^2 + z_0^2 - 2R_{0z}z_0 - r^2 = 0$$

Nuevamente una ecuación cuadrática tipo $at^2 + bt + c = 0$, donde:

$$\begin{array}{rcc} a & = & R_{1x}^2 + R_{1z}^2 \\ b & = & 2(R_{1x}R_{0x} - R_{1x}x_0 + R_{1z}R_{0z} - R_{1z}z_0) \\ c & = & R_{0x}^2 + x_0^2 - 2R_{0x}x_0 + R_{0z}^2 + z_0^2 - 2R_{0z}z_0 - r^2 \end{array}$$

lo que nos puede dar dos raices reales, una raíz doble real, o dos raices complejas: $t1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $t2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ dependiente del signo de $b^2 - 4ac$

5.2.5 Intersección rayo - Torus (at x0=0, y0=0, z0 = 0. i.e. at the origin):

Ecuación del rayo: $P = tP_1 + P_0$ (R_0es el origen del rayo, D es la dirección, t es la distancia)

Es equivalente a $P_t = t(P_{1x} + P_{1y} + P_{1z}) + P_{0x} + P_{0y} + P_{0z}$ó:

$$\begin{array}{c} x_t = P_{0x} + tP_{1x} \\ y_t = P_{0y} + tP_{1y} \\ z_t = P_{0z} + tP_{1z} \end{array}$$

Ecuación de un torus, ubicado en el plano $X - Y$:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)$$

Reemplazando los valores del rayo en la ecuación del Torus:

$$((P_{0x} + tP_{1x})^2 + (P_{0y} + tP_{1y})^2 + (P_{0z} + tP_{1z})^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2((P_{0x} + tP_{1x})^2 + (P_{0y} + tP_{1y})^2$$

Expandiendo los términos no constantes:

$$\begin{array}{ccc} (P_{0x}^2 + 2tP_{1x}P_{0x} + t^2P_{1x}^2 + & & 4R^2(P_{0x}^2 + 2tP_{1x}P_{0x} + t^2P_{1x}^2 + \\ P_{0y}^2 + 2tP_{1y}P_{0y} + t^2P_{1y}^2 + & = & P_{0y}^2 + 2tP_{1y}P_{0y} + t^2P_{1y}^2) \\ P_{0z}^2 + 2tP_{1z}P_{0z}^2 + t^2P_{1z}^2 + & & \\ R^2 - r^2)^2 & & \end{array}$$

Combinando términos en la misma potencia de t:

$$\begin{array}{ccc} ((P_{1x}^2 + P_{1y}^2 + P_{1z}^2)t^2 + & & 4R^2(P_{1x}^2 + P_{1y}^2)t^2 + \\ 2(P_{1x}P_{0x} + P_{1y}P_{0y} + P_{1z}P_{0z})t + & = & 8R^2(P_{1x}P_{0x} + P_{1y}P_{0y})t + \\ P_{0x}^2 + P_{0y}^2 + P_{0z}^2 + R^2 - r^2)^2 & & 4R^2(P_{0x}^2 + P_{0y}^2) \end{array}$$

Definiendo símbolos combinando partes constantes:

$$\begin{array}{rcl} G = & P_{1x}^2 + P_{1y}^2 + P_{1z}^2 & = |P_1|^2 = 1 \\ H = & 2(P_{1x}P_{0x} + P_{1y}P_{0y} + P_{1z}P_{0z}) & = 2(P_1 \bullet P_0) \\ I = & P_{0x}^2 + P_{0y}^2 + P_{0z}^2 + R^2 - r^2 & = |P_0|^2 + R^2 - r^2 \\ J = & 4R^2(P_{1x}^2 + P_{1y}^2) & \\ K = & 8R^2(P_{1x}P_{0x} + P_{1y}P_{0y}) & \\ L = & 4R^2(P_{0x}^2 + P_{0y}^2) & \end{array}$$

Reemplazando:

$$(Gt^2 + Ht + I)^2 = Jt^2 + Kt + L$$

Expandiendo el cuadrado:

$$G^2t^4 + H^2t^2 + I^2 + 2GHt^3 + 2HIt + 2GIt^2 = Jt^2 + Kt + L$$

Agrupando de nuevo las mismas potencias:

$$G^2t^4 + 2GHt^3 + (H^2 + 2GI)t^2 + 2HIt + I^2 = Jt^2 + Kt + L$$

Finalmente, restando el lado derecha del izquierda:

$$G^2t^4 + 2GHt^3 + (H^2 + 2GI - J)t^2 + (2HI - K)t + I^2 - L = 0$$

Nos da una ecuación de cuarto grado, que puede brindarnos de 0 a 4 raices t válidas.
Falta determinar la normal en cada una de los valores válidos de t:

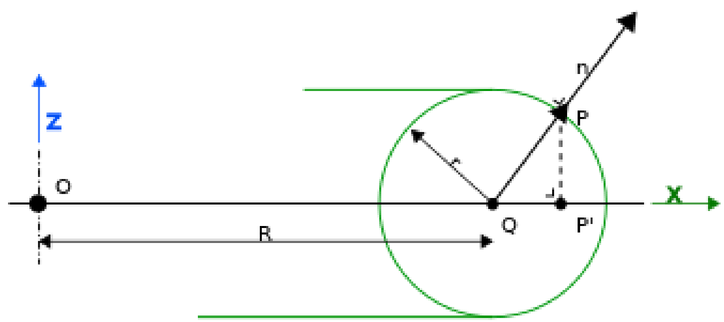


Figure 3: Cálculo de la normal en el punto de impacto

Pes el punto de impacto calculado anteriormente. Necesitamos calcular la normal n en este punto de impacto. Para eso necesitamos calcular el punto Q (el centro del tubo del torus en el plano determinado por P y pasando por el eje Z). Luego $P - Q$ es la direccion de esta normal.
Convertir al punto de impact P en P' (la proyección sobre X/Y) es fácil: solo tenemos que poner la componente z de P en zero:

$$\begin{aligned} P &= (P_x,, P_y, P_z) \\ P' &= (P_x,, P_y, 0) \end{aligned}$$

Además, sabemos que la distancia de Q al centro del torus es R (el radio mayor del torus). La distancia P' al centro es $\sqrt{P_x^2 + P_y^2}$. Si escalamos P_x y P_y con la relacion de distancias, obtenemos Q_x y Q_y:

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{R}{\sqrt{P_x^2+P_y^2}} P_x \\ Q_y &= \frac{R}{\sqrt{P_x^2+P_y^2}} P_y \\ Q_z &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, $P - Q$ es la dirección correcta de la normal, pero no tenemos que olvidarnos de normalizar al resultado!

5.2.6 Intersección rayo - Torus (at x0, y0, z0): (INCOMPLETO!)

Ecuación del rayo: $P = tP_1 + P_0$ (R_0es el origen del rayo, D es la dirección, t es la distancia)
Es equivalente a $P_t = t(P_{1x} + P_{1y} + P_{1z}) + P_{0x} + P_{0y} + P_{0z}$ó:

$$
\begin{aligned}
x_t &= P_{0x} + tP_{1x} \\
y_t &= P_{0y} + tP_{1y} \\
z_t &= P_{0z} + tP_{1z}
\end{aligned}
$$

Ecuación de un torus, ubicado en el plano X/Y at $Z = 0$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$$

Reemplazando los valores del rayo en la ecuación del Torus:

$$((P_{0x}+tP_{1x}-x_0)^2+(P_{0y}+tP_{1y}+y_0)^2+(P_{0z}+tP_{1z}+z_0)^2+R^2-r^2)^2 = 4R^2((P_{0x}+tP_{1x}-x_0)^2+(P_{0y}+tP_{1y}-y_0)^2$$

Expandiendo los términos no constantes:

$$
\begin{array}{ccc}
(P_{0x}^2 + t^2P_{1x}^2 + x_0^2 + 2tP_{1x}P_{0x} - 2P_{0x}x_0 - 2tP_{1x}x_0 + & & 4R^2(P_{0x}^2 + t^2P_{1x}^2 + x_0^2 + 2tP_{0x}P_{1x} - 2P_{0x}x_0 - 2tP_{1x}x_0 + \\
P_{0y}^2 + t^2P_{1y}^2 + y_0^2 + 2tP_{1y}P_{0y} - 2P_{0y}y_0 - 2tP_{1y}y_0 + & = & P_{0y}^2 + t^2P_{1y}^2 + y_0^2 + 2tP_{0y}P_{1y} - 2P_{0y}y_0 - 2tP_{1y}y_0) \\
P_{0z}^2 + t^2P_{1z}^2 + z_0^2 + 2tP_{1z}P_{0z} - 2P_{0z}z_0 - 2tP_{1z}z_0 + & & \\
R^2 - r^2)^2 & &
\end{array}
$$

Combinando términos en la misma potencia de t:

$$
\begin{array}{ccc}
((P_{1x}^2 + P_{1y}^2 + P_{1z}^2)t^2 + & & 4R^2(P_{1x}^2 + P_{1y}^2)t^2 + \\
2(P_{1x}P_{0x} - P_{1x}x_0 + P_{1y}P_{0y} - P_{1y}y_0 + P_{1z}P_{0z} - P_{1z}z_0)t + & = & 8R^2(P_{0x}P_{1x} - P_{1x}x_0 + P_{0y}P_{1y} - \\
P_{0x}^2 + P_{0y}^2 + P_{0z}^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2P_{0x}x_0 - 2P_{0y}y_0 - 2P_{0z}Z_0 + R^2 - r^2)^2 & & 4R^2(P_{0x}^2 + x_0^2 - 2P_{0x}x_0 + P_{0y}^2 + y_0^2
\end{array}
$$

Definiendo símbolos combinando partes constantes:

$$
\begin{array}{rcl}
G = & P_{1x}^2 + P_{1y}^2 + P_{1z}^2 & = |P_1|^2 = 1 \\
H = & 2(P_{1x}P_{0x} + P_{1y}P_{0y} + P_{1z}P_{0z} - P_{1x}x_0 - P_{1y}y_0 - P_{1z}z_0) & = 2(P_1 \bullet (P_0 - ctr)) \\
I = & P_{0x}^2 + P_{0y}^2 + P_{0z}^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2(P_{0x}x_0 + 2Py_0 + P_{0z}z_0) + R^2 - r^2 & = |P_0 - ctr|^2 + R^2 - r^2 \\
J = & 4R^2(P_{1x}^2 + P_{1y}^2) & \\
K = & 8R^2(P_{0x}P_{1x} - P_{1x}x_0 + P_{0y}P_{1y} - P_{1y}y_0) & \\
L = & 4R^2(P_{0x}^2 + x_0^2 - P_{0x}x_0 + P_{0y}^2 + y_0^2 - P_{0y}y_0) &
\end{array}
$$

Reemplazando:

$$(Gt^2 + Ht + I)^2 = Jt^2 + Kt + L$$

Expandiendo el cuadrado:

$$G^2t^4 + H^2t^2 + I^2 + 2GHt^3 + 2HIt + 2GIt^2 = Jt^2 + Kt + L$$

Agrupando de nuevo las mismas potencias:

$$G^2t^4 + 2GHt^3 + (H^2 + 2GI)t^2 + 2HIt + I^2 = Jt^2 + Kt + L$$

Finalmente, restando el lado derecha del izquierda:

$$G^2t^4 + 2GHt^3 + (H^2 + 2GI - J)t^2 + (2HI - K)t + I^2 - L = 0$$

Nos da una ecuación de cuarto grado, que puede brindarnos de 0 a 4 raices t válidas.
Falta determinar la normal en cada una de los valores válidos de t:

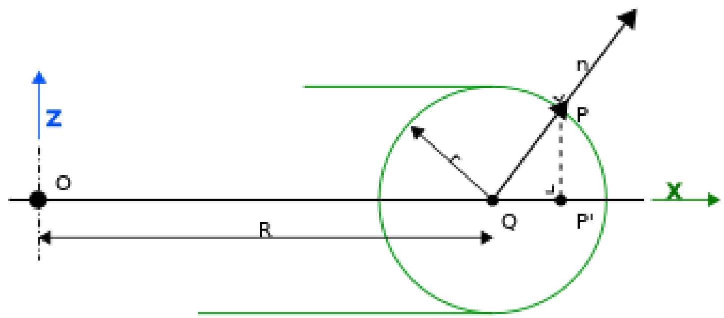


Figure 4: Cálculo de la normal en el punto de impacto

P es el punto de impacto calculado anteriormente. Necesitamos calcular la normal n en este punto de impacto. Para eso necesitamos calcular el punto Q (el centro del tubo del torus en el plano determinado por P y pasando por el eje Z). Luego $P - Q$ es la direccion de esta normal.
Convertir al punto de impact P en P' (la proyección sobre X/Y) es fácil: solo tenemos que poner la componente z de P en z_0:

$$\begin{aligned} P &= (P_{x,}, P_y, P_z) \\ P' &= (P_{x,}, P_y, z_0) \end{aligned}$$

Además, sabemos que la distancia de Q al centro del torus es R (el radio mayor del torus). La distancia P' al centro es $\sqrt{(P_x - x_0)^2 + (P_y - y_0)^2}$. Si escalamos P_x y P_y con la relacion de distancias, obtenemos Q_x y Q_y:

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{R}{\sqrt{(P_x-x_0)^2+(P_y-y_0)^2}}(P_x - x_0) \\ Q_y &= \frac{R}{\sqrt{(P_x-x_0)^2+(P_y-y_0)^2}}(P_y - y_0) \\ Q_z &= z_0 \end{aligned}$$

Ahora, $P - Q$ es la dirección correcta de la normal, pero no tenemos que olvidarnos de normalizar al resultado!

5.2.7 Intersección rayo - Triángulo:

Ecuación del rayo:

$$P = P_0 + tP_1$$

(P_0 es el origen del rayo, P_1 es la dirección, t es la distancia)

Es equivalente a

$$P_t = t(P_{1x} + P_{1y} + P_{1z}) + P_{0x} + P_{0y} + P_{0z}$$

ó:

$$\begin{aligned} x_t &= P_{0x} + tP_{1x} \\ y_t &= P_{0y} + tP_{1y} \\ z_t &= P_{0z} + tP_{1z} \end{aligned}$$

Para la determinación de la ecuación del plano, necesitamos la normal. Utilizamos dos vectores originando en un vertice hacia dos otros. Elegir los vertices (A, B, C) de tal forma que la normal tenga la polaridad correcta! (ie: seguir regla de mano izquierda para seguir la convención el programa)

$$n = \frac{(B - A) \times (B - C)}{\|(B - A) \times (B - C)\|}$$

El plano está representado por $ax + by + cz = d$, donde a, b y c también son los componentes de la normal sobre el plano.

$$t = \frac{(P_0 - A) \bullet n}{n \bullet P_1}$$

donde n es la normal, d es la constante de la ecuación, P_0 es el origen del rayo, P_1 es la dirección.
Si $n \bullet d$ es 0, entonces el rayo es paralelo al plano - o no intersección.
Teniendo la normal, determinamos si el rayo es paralelo al plano:

$$n \bullet P_1$$

Ahora falta determinar si el punto de impacto está dentro o fuera del triángulo. Para hacerlo, hacemos el producto vectorial (cruz) entre cada lado del triángulo y un vector entre el punto de impacto (P) y el vértice. Considerando que cada lado del triángulo divide al espacio en dos áreas, el signo del producto vector indica de cual costado se encuentra P. Tener cuidado de respetar las reglas del sistema de ejes elegido!

$$((B - A) \times (P - A)) \bullet n < 0$$

$$((C - B) \times (P - B)) \bullet n < 0$$

$$((A - C) \times (P - C)) \bullet n < 0$$

Si alguna de estas condiciones no se cumple, la intersección se encuentra fuera del triángulo.

5.2.8 Intersección rayo - Cono:

Ecuación del rayo:

$$P = P_0 + tP_1$$

(P_0 es el origen del rayo, P_1 es la dirección, t es la distancia)
Es equivalente a

$$P_t = t(P_{1x} + P_{1y} + P_{1z}) + P_{0x} + P_{0y} + P_{0z}$$

ó:

$$\begin{aligned} x_t &= P_{0x} + tP_{1x} \\ y_t &= P_{0y} + tP_{1y} \\ z_t &= P_{0z} + tP_{1z} \end{aligned}$$

La definición del cono es mas complicado:
Limitamos el ángulo $\theta < 90°$
Todos los puntos sobre el cono cumplen con:

$$(X - C) \bullet V = \|X - C\| \cos\theta$$

donde X es el punto, C es la cima del cono, V es la 'vertical' desde C, por el centro del cono. θ es el ángulo de apertura.
Multiplicando la ecuación con si mismo, y reorganizando algunos términos:

$$\frac{((P - C) \bullet V)^2}{(P - C) \bullet (P - C)} = \cos^2\theta$$

$$((P - C) \bullet V)^2 - (P - C) \bullet (P - C) \cos^2\theta = 0$$

Al efectivamente cuadratar ambos lados, introducimos una raíz extra en la solución - lo solucionaremos después!

Reemplazamos ahora P en la ecuación por el valor en la ecuación del rayo:

$$((P_0 + tP_1 - C) \bullet V)^2 - (P_0 + tP_1 - C) \bullet (P_0 + tP_1 - C) \cos^2 \theta = 0$$

$P_0 - C$ es equivalente al vector P_0C:

$$((PC + tP_1) \bullet V)^2 - (PC + tP_1) \bullet (PC + tP_1) \cos^2 \theta = 0$$

$$(PC \bullet V + tP_1 \bullet V)^2 - (PC \bullet PC + t^2 P_1 \bullet P_1 + 2tP_1 \bullet PC) \cos^2 \theta = 0$$

$P_1 \bullet P_1$ es 1, y ejecutando el cuadrado del primer término:

$$t^2(P_1 \bullet V)^2 + (PC \bullet V)^2 + 2(PC \bullet V)(P_1 \bullet V)t - t^2 \cos^2 \theta - 2tP_1 \bullet PC \cos^2 \theta - PC \bullet PC \cos^2 \theta$$

Esto constituye una ecuación estandard de segundo grado, con coeficientes:

$$\begin{array}{rcc} a & = & (P_1 \bullet V)^2 - \cos^2 \theta \\ b & = & 2((PC \bullet V)(P_1 \bullet V) - P_1 \bullet PC \cos^2 \theta) \\ c & = & (PC \bullet V)^2 - PC \bullet PC \cos^2 \theta \end{array}$$

Como en la esfera o el cilindro, esta ecuación tiene 0, 1 o 2 raices reales. Atento: Todavía tenemos que rechazar el cono extra generado arriba.

$$(P_0 - C) \bullet V > 0$$

5.2.9 Intersección rayo - Cilindro:

Ecuación del rayo:

$$R = R_0 + tR_1$$

(P_0 es el origen del rayo, P_1 es la dirección, t es la distancia)

Es equivalente a

$$R_t = t(R_{1x} + R_{1y} + R_{1z}) + R_{0x} + R_{0y} + R_{0z}$$

ó:

$$\begin{array}{c} x_t = R_{0x} + tR_{1x} \\ y_t = R_{0y} + tR_{1y} \\ z_t = R_{0z} + tR_{1z} \end{array}$$

El cilindro se define por: $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$ (los centros de la tapas), $\mathbf{v}$, un vector unitario en la dirección del resto del cilindro, y r, el radio del cilindro.

Conseguimos la ecuación del cilindro exigiendo que cualquier punto de la superficie tiene que estar a r del centro. Si $\mathbf{q}$ es un punto en la superficie:

$$(q - P_1 - (v \bullet (q - P_1))v)^2 = r^2$$

Sustituyendo la ecuación del rayo en lugar de q:

$$(R_0 + tR_1 - P_1 - (v \bullet (R_0 + tR_1 - P_1))v)^2 - r^2 = 0$$

$$(R_0 - P_1) + tR_1 - (v \bullet ((R_0 - P_1) - tR_1))v)^2 - r^2 = 0$$

$$(R_0 - P_1)^2 + t^2 R_1^2 + (v \bullet ((R_0 - P_1) - tR_1))^2 (v \bullet v) + 2R_1(R_0 - P_1)t - 2(R_0 - P_1)(v \bullet ((R_0 - P_1) - tR_1))v - R_1(v \bullet ((R_0 - P_1) - tR$$

$\mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{1}$, $R_0 - P_1 = d$:

$$d^2 + R_1^2 t^2 + (v \bullet (d - tR_1))^2 + 2R_1 d(t) - 2d(v \bullet (d - tR_1))v - R_1(v \bullet (d - tR_1)vt - r^2 = 0$$

$$d^2 + R_1^2 t^2 + (v \bullet d - t(v \bullet R_1))^2 + 2R_1 d(t) - 2d(v \bullet d - t(v \bullet R_1))v - R_1(v \bullet d - t(v \bullet R_1))vt - r^2 = 0$$

Expandiendo y agrupando potencias de t nos da una ecuación de segundo grado, con coeficientes:

$$\begin{array}{rcl} a & = & (v - (v \bullet v_a)v_a)^2 \\ b & = & 2((v - (v \bullet v_a)v_a) \bullet (P_2 - ((P_2 - P_1).v_a)v_a) \\ c & = & (P_2 - P_1 - ((P_2 - P_1)v_a)^2 - r^2 \end{array}$$